第 2 节 非合一结构的图象性质综合题（★★★☆）

强化训练

1．（2020·新课标III卷·★★★）关于函数 $f(x)=\sin x+\dfrac{1}{\sin x}$ 有如下四个命题：

① $f(x)$ 的图象关于 y 轴对称；

② $f(x)$ 的图象关于原点对称；

③ $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 对称；

④ $f(x)$ 的最小值为 2.

其中所有真命题的序号是_____.

答案：②③

解析：①项，$f(-x)=\sin(-x)+\dfrac{1}{\sin(-x)}=-\sin x-\dfrac{1}{\sin x}=-f(x)\Rightarrow f(x)$ 为奇函数，

所以 $f(x)$ 的图象关于原点对称，故①项错误，②项正确；

③项，这里要判断 $f(x)$ 是否关于 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 对称，只需验证 $f(x)$ 是否满足 $f(\pi-x)=f(x)$，

$f(\pi-x)=\sin(\pi-x)+\dfrac{1}{\sin(\pi-x)}=\sin x+\dfrac{1}{\sin x}=f(x)\Rightarrow f(x)$ 的图象关于 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 对称，故③项正确；

④项，当 $\sin x<0$ 时，$f(x)<0$，所以 $f(x)$ 的最小值肯定不是 2，故④项错误.

2．（2022·深圳模拟·★★★）若函数 $f(x)=|\tan(\omega x-\omega)|(\omega>0)$ 的最小正周期为 4，则下列区间中 $f(x)$ 单调递增的是（　　）

（A）$(-1,\dfrac{1}{3})$　（B）$(\dfrac{1}{3},\dfrac{5}{3})$　（C）$(\dfrac{5}{3},3)$　（D）$(3,4)$

答案：C

解析：题干给了周期，可由此求 ω，正切类函数整体加绝对值不改变周期，

函数 $y=|\tan(\omega x-\omega)|$ 的最小正周期与 $y=\tan(\omega x-\omega)$ 相同，

因为 $y=\tan(\omega x-\omega)$ 的最小正周期 $T=\dfrac{\pi}{\omega}$，所以 $\dfrac{\pi}{\omega}=4$，从而 $\omega=\dfrac{\pi}{4}$，故 $f(x)=\left|\tan(\dfrac{\pi}{4}x-\dfrac{\pi}{4})\right|$，

函数 $y=\tan(\dfrac{\pi}{4}x-\dfrac{\pi}{4})$ 的图象可通过找零点和周期快速画出，再留上翻下即得 $f(x)$ 的图象，故画图判断选项，

令 $\dfrac{\pi}{4}x-\dfrac{\pi}{4}=k\pi$ 得 $x=4k+1(k\in\mathbf{Z})$，所以 $y=\tan(\dfrac{\pi}{4}x-\dfrac{\pi}{4})$ 有零点 $x=1,5,\cdots$，结合周期为 4 可得其大致图象如图 1，

所以 $f(x)=\left|\tan(\dfrac{\pi}{4}x-\dfrac{\pi}{4})\right|$ 的大致图象如图 2，由图可知 $f(x)$ 在 $(-1,\dfrac{1}{3})$ 上↘；在 $(\dfrac{1}{3},\dfrac{5}{3})$ 上先↘后↗；

在 $(\dfrac{5}{3},3)$ 上↗；在 $(3,4)$ 上↘，故选 C.

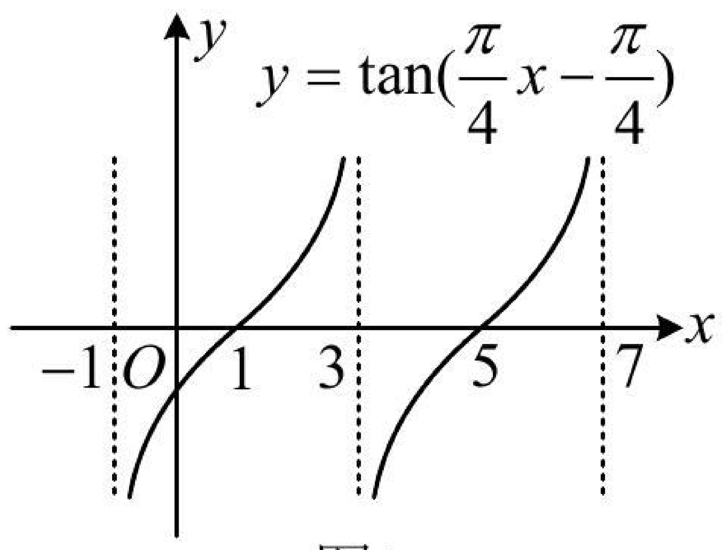


图1

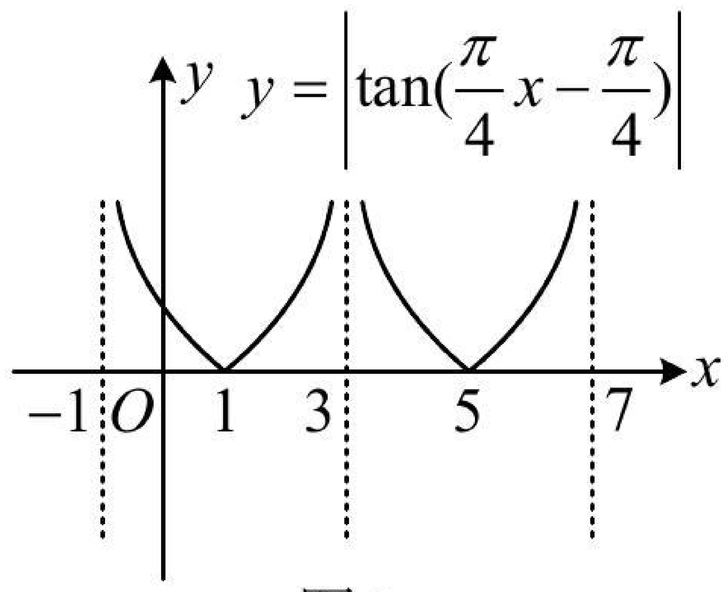


图2

3．（2022·山西二模·★★★）下面关于函数 $f(x)=\sin 2x+2|\sin x|\cos x$ 的结论，其中错误的是（　　）

（A）$f(x)$ 的值域是 $[-2,2]$

（B）$f(x)$ 是周期函数

（C）$f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{\pi}{2}$ 对称

（D）当 $x\in(\pi,2\pi)$ 时，$f(x)=0$

答案：C

解析：A 项，要求值域，得去绝对值，可通过周期把研究的范围缩窄，再讨论，下面先分析周期，

由题意，$f(x+2\pi)=\sin 2(x+2\pi)+2|\sin(x+2\pi)|\cos(x+2\pi)=\sin 2x+2|\sin x|\cos x=f(x)$，

所以 $f(x)$ 是以 2π 为周期的周期函数，不妨在 $[0,2\pi)$ 这个周期内求值域，可通过讨论去绝对值，

当 $x\in[0,\pi]$ 时，$\sin x\ge 0$，所以 $f(x)=\sin 2x+2\sin x\cos x=\sin 2x+\sin 2x=2\sin 2x$，

因为 $0\le x\le\pi$，所以 $0\le 2x\le 2\pi$，从而 $-1\le\sin 2x\le 1$，故 $f(x)$ 的取值范围是 $[-2,2]$；

当 $x\in(\pi,2\pi)$ 时，$\sin x<0$，所以 $f(x)=\sin 2x-2\sin x\cos x=\sin 2x-\sin 2x=0$；

故 $f(x)$ 在 $[0,2\pi)$ 上的值域是 $[-2,2]$，所以 $f(x)$ 在 **R** 上的值域也是 $[-2,2]$，

到此可判断出 A 项、B 项、D 项均正确；故答案选 C，C 项为什么错了？我们也来分析一下，

C 项，要判断 $x=\frac{\pi}{2}$ 是否为对称轴，只需看 $f(\pi-x)=f(x)$ 是否成立，

$f(\pi-x)=\sin 2(\pi-x)+2|\sin(\pi-x)|\cos(\pi-x)=\sin(2\pi-2x)+2|\sin x|(-\cos x)=-\sin 2x-2|\sin x|\cos x=-f(x)$，

所以 $f(x)$ 的图象不关于直线 $x=\frac{\pi}{2}$ 对称，故 C 项错误.

4．（2019·新课标 I 卷·★★★）关于函数 $f(x)=\sin|x|+|\sin x|$ 有下述四个结论：

① $f(x)$ 是偶函数；② $f(x)$ 在区间 $(\frac{\pi}{2},\pi)$ 单调递增；③ $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 有 4 个零点；④ $f(x)$ 的最大值为 2.

其中所有正确结论的编号是（　　）

（A）①②④　　（B）②④　　（C）①④　　（D）①③

答案：C

解法 1：①项，$f(-x)=\sin|-x|+|\sin(-x)|=\sin|x|+|-\sin x|=\sin|x|+|\sin x|=f(x)$，

所以 $f(x)$ 为偶函数，故①项正确；

②项，限定了 x 的范围，先据此去掉绝对值，

当 $x\in(\frac{\pi}{2},\pi)$ 时， $\sin x>0$，所以 $f(x)=2\sin x$，从而 $f(x)$ 在区间 $(\frac{\pi}{2},\pi)$ 上↘，故②项错误；

③项，我们已经得出了 $f(x)$ 是偶函数，可先看 $[0,\pi]$ 上的零点情况，此时可去掉绝对值，

当 $x\in[0,\pi]$ 时， $\sin x\ge 0$，所以 $f(x)=\sin x+\sin x=2\sin x$，故 $f(x)=0$ 即为 $2\sin x=0$，解得： $x=0$ 或 π，

由偶函数的对称性知 $-\pi$ 也是 $f(x)$ 的零点，所以 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 有 3 个零点，故③项错误；

④项，因为 $\begin{cases}\sin|x|\le 1\\ |\sin x|\le 1\end{cases}$，所以 $f(x)=\sin|x|+|\sin x|\le 2$，又 $f(\frac{\pi}{2})=2$，所以 $f(x)_{\max}=2$，故④项正确.

解法 2：判断出选项①后，其余选项也可通过画图来判断，因为 $f(x)$ 是偶函数，所以可先画 $[0,+\infty)$ 上的图象，再由对称性画出 $(-\infty,0)$ 上的图象，

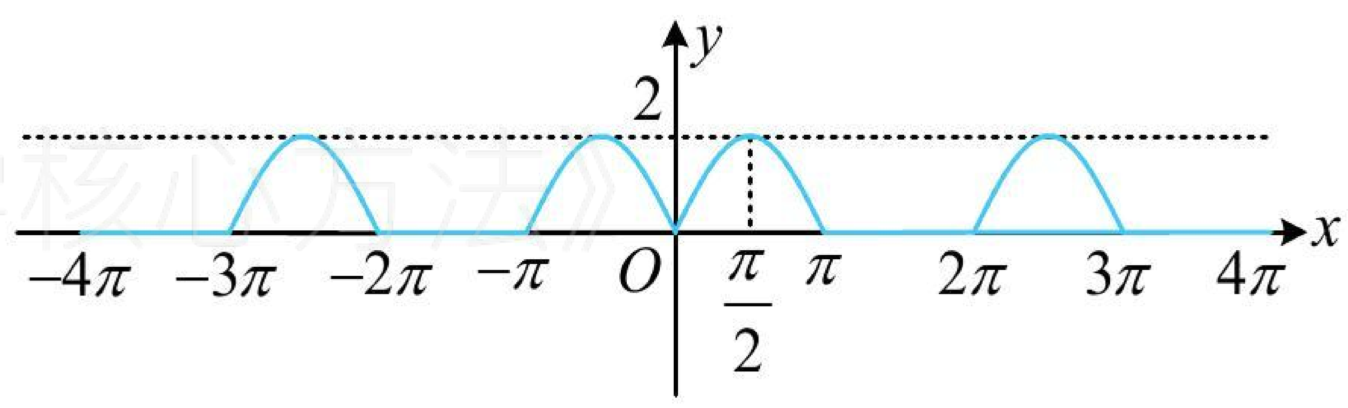
当 $x\in[0,+\infty)$ 时， $f(x)=\sin x+|\sin x|$， $f(x+2\pi)=\sin(x+2\pi)+|\sin(x+2\pi)|=\sin x+|\sin x|=f(x)$，

所以 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上的图象以 2π 为周期重复出现，先看 $[0,2\pi)$ 的情形，此时可通过讨论去绝对值，

当 $0\le x\le\pi$ 时， $\sin x\ge 0$，所以 $f(x)=\sin x+\sin x=2\sin x$；

当 $\pi<x<2\pi$ 时， $\sin x<0$，所以 $f(x)=\sin x+(-\sin x)=0$；故 $f(x)$ 的部分图象如图中蓝色曲线，

由图可知 $f(x)$ 在 $(\frac{\pi}{2},\pi)$ 上↘， $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上有 3 个零点， $f(x)_{\max}=2$，所以选项②③错误，④正确.



5.（2022•景德镇模拟•★★★★）（多选）已知函数 $f(x)=\begin{cases}\tan x,\tan x>\sin x\\ \sin x,\tan x\le\sin x\end{cases}$，则（）

（A） $f(x)$ 的最小正周期是 2π

（B） $f(x)$ 的值域是 $(-1,+\infty)$

（C）当且仅当 $k\pi-\frac{\pi}{2}<x\le k\pi(k\in\mathbf{Z})$ 时， $f(x)\le 0$

（D） $f(x)$ 的单调递增区间是 $[k\pi,k\pi+\frac{\pi}{2})(k\in\mathbf{Z})$

答案：AB

解析：本题 $f(x)$ 是分段函数，两段上的解析式都很简单，可以画出 $f(x)$ 的图象，来判断选项，

在同一坐标系下画出 $y=\tan x$ 和 $y=\sin x$ 的图象如图 1，

二者的公共周期是 2π，不妨先在 $(0,2\pi)$ 上考虑，可分段来看，

在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 那一段， $\begin{cases}0<\cos x<1\\ 0<\sin x<1\end{cases}$，所以 $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}>\sin x$，

从而 $y=\tan x$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上的图象始终在 $y=\sin x$ 图象的上方，

其余部分 $\tan x$ 与 $\sin x$ 的大小由图 1 容易看出，故可画出 $f(x)$ 的图象如图 2，由图可知 A 项和 B 项正确；

对于 C 项，我们可先在 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})\cup(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})$ 这个周期上求 $f(x)\le 0$ 的解集，再加上 $2k\pi$ 即为全部的解，

由图可知 $f(x)\le 0$ 在 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})\cup(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})$ 上的解集为 $(-\frac{\pi}{2},0]$，

所以全部的解集为 $(2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi](k\in\mathbf{Z})$，故 C 项错误；

函数 $f(x)$ 的单调递增区间除了 D 选项给的那部分，还有 $(2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi]$，例如 $(-\frac{\pi}{2},0]$，故 D 项错误.

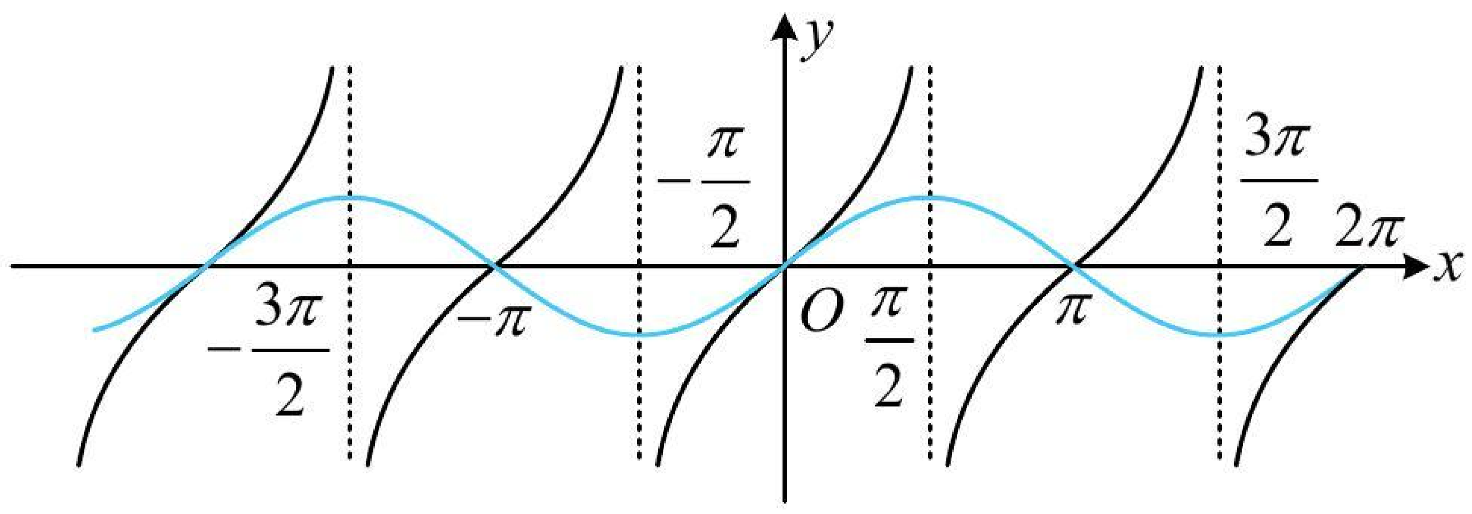


图1

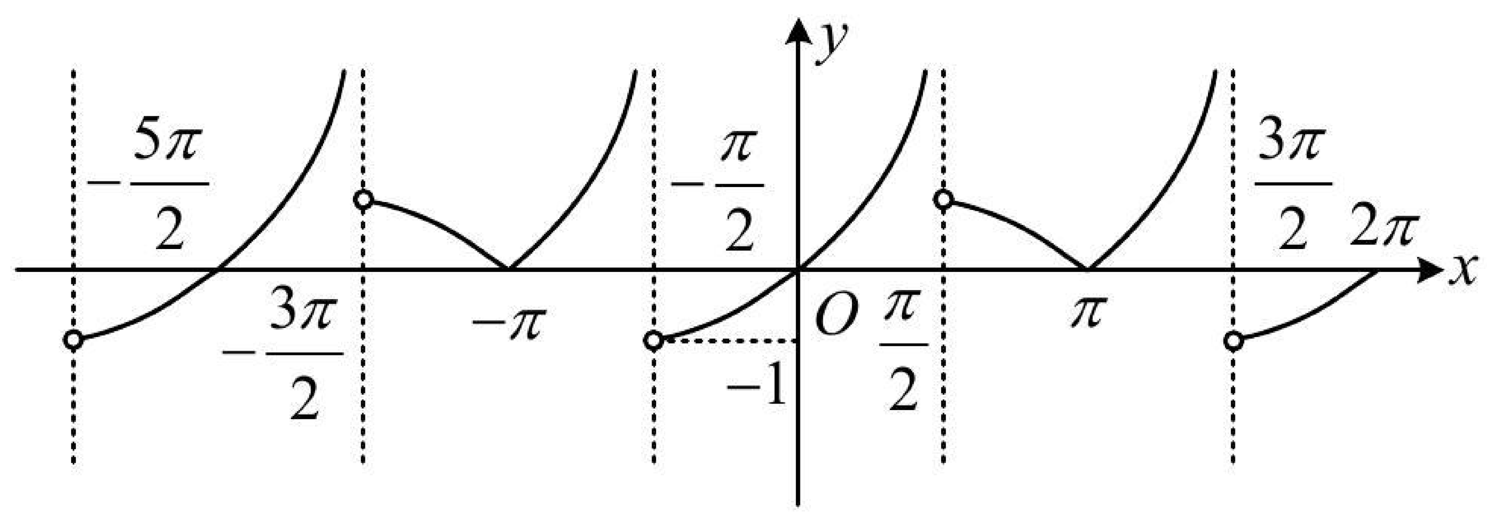


图2

6.（★★★★）（多选）已知函数 $f(x)=\cos(\sin x)$，则下列关于该函数性质的说法中正确的是（　　）

（A） $f(x)$ 的一个周期为 2π

（B） $f(x)$ 的值域是 $[-1,1]$

（C） $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\pi$ 对称

（D） $\frac{\pi}{2}$ 是 $f(x)$ 在区间 $(0,\pi)$ 上唯一的极值点

答案：ACD

解法 1：A 项， $f(x+2\pi)=\cos(\sin(x+2\pi))=\cos(\sin x)=f(x)\Rightarrow f(x)$ 的一个周期是 2π，故 A 项正确；

B 项，要求值域，可将 $\sin x$ 换元成 t，简化解析式，再画图来看，

设 $t=\sin x$，则 $f(x)=\cos t$，且 $-1\le t\le 1$，函数 $y=\cos t$ 的部分图象如图，

由图可知当 $t\in[-1,1]$ 时， $\cos 1\le\cos t\le 1$，从而 $f(x)$ 的值域是 $[\cos 1,1]$，故 B 项错误；

C 项，要判断 $f(x)$ 是否关于 $x=\pi$ 对称，就看 $f(2\pi-x)=f(x)$ 是否成立，

$f(2\pi-x)=\cos(\sin(2\pi-x))=\cos(-\sin x)=\cos(\sin x)=f(x)\Rightarrow f(x)$ 的图象关于直线 $x=\pi$ 对称，故 C 项正确；

D 项，判断极值点就是判断单调性，这里的函数可以看成复合函数，用同增异减准则来判断，

函数 $y=f(x)$ 是由 $y=\cos t$ 和 $t=\sin x$ 复合而成，

结合内层函数 $t=\sin x$ 的单调区间，我们把 $(0,\pi)$ 分成 $(0,\frac{\pi}{2})$ 和 $(\frac{\pi}{2},\pi)$ 两段考虑，

当 $x\in(0,\dfrac{\pi}{2})$ 时，$t=\sin x$ ↗，且 $t\in(0,1)$，因为 $y=\cos t$ 在 $(0,1)$ 上↘，所以 $f(x)$ 在 $(0,\dfrac{\pi}{2})$ 上↘；

当 $x\in(\dfrac{\pi}{2},\pi)$ 时，$t=\sin x$ ↘，且 $t\in(0,1)$，因为 $y=\cos t$ 在 $(0,1)$ 上也↘，所以 $f(x)$ 在 $(\dfrac{\pi}{2},\pi)$ 上↗；

从而 $\dfrac{\pi}{2}$ 是 $f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上唯一的极值点，故 D 项正确.

解法 2：选项 A、B、C 的判断方法同解法 1，要判断选项 D，也可通过求导来分析单调性，

由题意，$f'(x)=-\sin(\sin x)\cos x$，先判断 $\sin(\sin x)$ 这部分的正负，

因为 $0<x<\pi$，所以 $0<\sin x\le 1$，从而 $\sin(\sin x)>0$，

故 $f'(x)>0\Leftrightarrow \cos x<0\Leftrightarrow \dfrac{\pi}{2}<x<\pi$，$f'(x)<0\Leftrightarrow \cos x>0\Leftrightarrow 0<x<\dfrac{\pi}{2}$，

所以 $f(x)$ 在 $(0,\dfrac{\pi}{2})$ 上↘，在 $(\dfrac{\pi}{2},\pi)$ 上↗，故 $\dfrac{\pi}{2}$ 是 $f(x)$ 在区间 $(0,\pi)$ 上唯一的极值点.